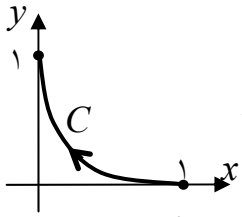
(فرم تکرار سوالات امتحانات پایان ترم)
دانشکده ریاضي

گروه آموزشی : **ریاضي** امتحان درس : **ریاضي۲ -فني (۱۱ گروه هماهنگ)** نیمسال (اول/ **دوم**) **۹۱-۱۳۹۰** نام مدرس:
نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی : تاریخ : **۱۳۹۱/۳/۲۳** وقت : **۱۳۵** دقیقه

توجه :
مطالب حداکثر اول پاسخنامه را در کادر مشخص نمایید.
در طول برگزاري امتحان هیچ سوالي پاسخ داده نمي شود.

سوال ۱- نزدیکترین نقطه از رویه $z = xy + 1$ به مبدا مختصات را بیابید. **۱۵ نمره**

سوال۲- فرض کنید C منحنی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ باشد. (شکل مقابل)
الف) مساحت ناحیه محدود به C و محورهای مختصات را محاسبه کنید.
ب) انتگرال منحنی الخط زیر را محاسبه کنید. **۲۰ نمره**



$$I = \int_C (x^2 y \cos x + 2xy \sin x - y^2 e^x)\, dx + (x^2 \sin x - 2ye^x)\, dy$$

سوال۳- اگر D ناحیه محدود به دایره‌های $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 = e^2$ باشد ،
انتگرال دوگانه $\iint_D \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}\, dxdy$ را محاسبه کنید. **۲۰ نمره**

سوال۴- معادله رویه $\rho = 2\cos\varphi$ را در مختصات دکارتی نوشته ، آن را توصیف کرده و سپس حجم آن را به کمک انتگرالها محاسبه نمایید. **۲۰ نمره**

سوال۵- اگر V ناحیه واقع در یک هشتم اول و محدود به رویه $x^2 + y^2 = 2x$ و صفحات $y = 0$ ، $z = 0$ و $z = a$ باشد انتگرال $\iiint_V z\sqrt{x^2 + y^2}\, dxdydz$ را محاسبه کنید. ($a > 0$) **۱۵ نمره**

سوال۶- مساحت قسمتی از سهمیگون $2z = x^2 + y^2$ که زیر صفحه $z = 2$ قرار دارد را بیابید. **۲۰ نمره**

سوال۷- اگر $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ و $F = \nabla f$ ، درستی قضیه استوکس را برای تابع برداری F روی سطح خارجی $S:\ z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ و منحنی $C: x^2 + y^2 = a^2$ بررسی کنید. ($a > 0$) **۲۰ نمره**

موفق باشید

پاسخ سوالات امتحان پایان ترم درس ریاضي۲-فني (۱۱ گروه هماهنگ)
نیمسال دوم ۹۱-۱۳۹۰

جواب سوال۱ - اگر $A=(x,y,z)$ نقطه مورد نظر باشد فاصله آن تا مبدا برابر است با : $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
تابع $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ را در نظر می‌گیریم.

روش اول : با جایگذاری z داریم : $g(x,y)=x^2+y^2+(xy+1)^2$

$$\begin{cases} g_x=2x+2y(xy+1) \\ g_y=2y+2x(xy+1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x+2y(xy+1)=0 \\ 2y+2x(xy+1)=0 \end{cases} \rightarrow x^2=y^2$$

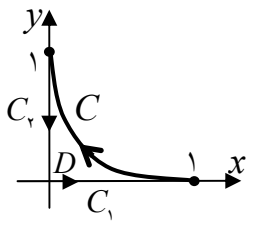
$$\rightarrow \begin{cases} x=y \rightarrow 2x+2x(x^2+1)=0 \rightarrow 2x(x^2+1)=0 \rightarrow x=y=0 \\ x=-y \rightarrow 2x-2x(-x^2+1)=0 \rightarrow 2x^3=0 \rightarrow x=y=0 \end{cases} \rightarrow A=(0,0,1)$$

روش دوم (ضرایب لاگرانژ) : تابع $h(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2-\lambda(xy+1-z)$ را در نظر می گیریم. داریم :

$$h_x=2x-\lambda y\ ,\ h_y=2y-\lambda x\ ,\ h_z=2z+\lambda\ ,\ h_\lambda=-(xy+1-z)$$

اکنون باید دستگاه معادلات $2x-\lambda y=0\ ,\ 2y-\lambda x=0\ ,\ 2z+\lambda=0\ ,\ -(xy+1-z)=0$ را حل کنیم.
اگر $\lambda=0$ آنگاه $x=y=z=0$ که این نقطه متعلق به رویه نیست پس $\lambda\neq 0$. در این صورت از معادلات $2x-\lambda y=0\ ,\ 2y-\lambda x=0$ نتیجه می شود $x^2=y^2$. اگر $x=y\neq 0$ آنگاه $\lambda=2$ و طبق معادله $2z+\lambda=0$ داریم $z=-1$ و در این صورت معادله چهارم یعنی $-(xy+1-z)=0$ به صورت $x^2+2=0$ در آمده و جواب ندارد. اگر $x=-y$ آنگاه $\lambda=-2$ و طبق معادله $2z+\lambda=0$ داریم $z=1$ و در این صورت معادله چهارم یعنی $-(xy+1-z)=0$ به صورت $x^2=0$ در آمده و جواب منحصر بفرد $x=0$ دارد. بنابر این تنها جواب مساله نقطه $A=(0,0,1)$ است.

جواب سوال۲ - مساحت ناحیه مورد نظر برابر است با :



$$S=\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{(1-\sqrt{x})^2}dydx=\int_{x=0}^{1}(1-\sqrt{x})^2dx=\int_{x=0}^{1}(1-2\sqrt{x}+x)dx=x-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{2}x^2\,|_{x=0}^{1}=\frac{1}{6}$$

ب) حل مستقیم انتگرال مشکل به نظر می رسد. به کمک قضیه گرین آن را حل می کنیم.
قرار می دهیم : $p(x,y)=x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2e^x\ ,\ q(x,y)=x^2\sin x-2ye^x$
و داریم : $p_y(x,y)=x^2\cos x+2x\sin x-2ye^x\ ,\ q_x(x,y)=2x\sin x+x^2\cos x-2ye^x$
یعنی اگر C' یک مسیر ساده و بسته و D نا حیه محصور به آن باشد داریم :

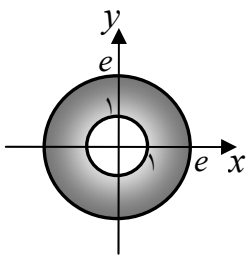
$$I=\int_{C'}(x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2e^x)\,dx+(x^2\sin x-2ye^x)\,dy=\iint_D(q_x-p_y)dxdy=0$$

ناحیه D را که در (الف) مساحت آن را حساب کردیم در نظر گرفته و مرز آن را C' می نامیم.
مسیر C' شامل سه قسمت است :

$$\int_{C_1}p\,dx+q\,dy+\int_{C_2}p\,dx+q\,dy+\int_{C}p\,dx+q\,dy=\int_{C'}p\,dx+q\,dy=0$$

$$\int_{C_1}p\,dx+q\,dy=\int_{C_1}0\times dx=0\ ,\ \int_{C_2}p\,dx+q\,dy=\int_{y=1}^{0}-2ydy=-y^2\,|_{y=1}^{0}=1\ \rightarrow\ \int_{C}p\,dx+q\,dy=-1$$

جواب سوال۳ - به کمک تغییر متغیر مختصات قطبی داریم :

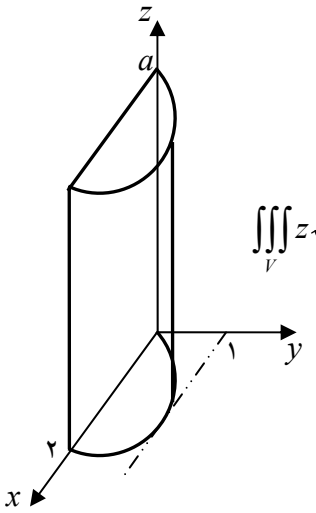


$$\iint_D\frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy=\iint_D\frac{\ln r^2}{r^2}rdrd\theta=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{e}\frac{2\ln r}{r}drd\theta=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{e}\ln^2 r\,|_{r=1}^{e}\,d\theta=\int_{\theta=0}^{2\pi}d\theta=2\pi$$

جواب سوال۴ - اگر دو طرف رابطه را در ρ ضرب کنیم داریم $\rho^2 = 2\rho\cos\varphi$ یعنی $x^2+y^2+z^2 = 2z$ و یا $x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$ که معادله یک کره به مرکز $(0,0,1)$ و شعاع برابر ۱ است.
به کمک انتگرال سه گانه و مختصات کروی حجم آن را محاسبه می کنیم.

$$V = \int_{\varphi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{2\cos\varphi}\int_{\theta=0}^{2\pi} \rho^2 \sin\varphi\, d\theta\, d\rho\, d\varphi = 2\pi\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{2\cos\varphi} \rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi$$

$$= 2\pi\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \frac{1}{3}\rho^3 \sin\varphi\,\Big|_{\rho=0}^{2\cos\varphi} d\varphi = 2\pi\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\frac{8}{3}\cos^3\varphi\sin\varphi\, d\varphi = -\frac{4\pi}{3}\cos^4\varphi\,\Big|_{\varphi=0}^{\pi/2} = \frac{4\pi}{3}$$



جواب سوال۵ –

$$\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{2\cos\theta}\int_{z=0}^{a} z\sqrt{r^2}\, r\,dz\,dr\,d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{2\cos\theta} r^2\int_{z=0}^{a} z\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{2\cos\theta} r^2\,dr\,d\theta = \frac{a^2}{2}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\frac{1}{3}r^3\,\Big|_{r=0}^{2\cos\theta} d\theta = \frac{4a^2}{3}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\cos^3\theta\, d\theta$$

$$= \frac{4a^2}{3}\int_{\theta=0}^{\pi/2}(\cos\theta - \cos\theta\sin^2\theta)\,d\theta = \frac{4a^2}{3}(\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta)\,\Big|_{\theta=0}^{\pi/2} = \frac{8a^2}{9}$$

جواب سوال۶ - تصویر سطح مورد نظر بر روی صفحه $z=0$ را D می نامیم . بردار قائم بر رویه در نقطه (x,y,z) برابر است با $N = (2x, 2y, -2)$ و بردار یکه قائم بر سطح برابر است با $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}(x,y,-1)$. یعنی $|\cos\gamma| = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ و $dS = d\sigma = \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$ بنابر این مساحت سطح D برابر است با :

$$\iint_S d\sigma = \iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_{r=0}^{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\sqrt{1+r^2}\, r\,d\theta\,dr = 2\pi\int_{r=0}^{2} r\sqrt{1+r^2}\,dr = \frac{2\pi}{3}\sqrt{(1+r^2)^2}\,\Big|_{r=0}^{2} = \frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5}-1)$$

جواب سوال۷ - باید نشان دهیم $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S curl\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$. اگر $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ آنگاه $F = \nabla f = \frac{-1}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}(x,y,z)$ ، و $curlF = curl\,\nabla f = (0,0,0)$ پس $\iint_S curl\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = 0$ و کافی است نشان دهیم $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$. روی مسیر C داریم $z=0$ یعنی $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C \frac{-xdx - ydy}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}$ و در مختصات قطبی داریم :

$$y = a\sin\theta\,,\ dy = a\cos\theta \to -ydy = -a^2\sin\theta\cos\theta \quad ، \quad x = a\cos\theta\,,\ dx = -a\sin\theta \to -xdx = a^2\sin\theta\cos\theta$$

بنابر این $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C \frac{0}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} = 0$ و مساله حل شده است.